2. WPROWADZENIE - „O niepewnościach pomiarowych"

****** * ******

Pomiary – wykonywane są zawsze z pewnym stopniem dokładności; zależnym od wielu czynników, które dzielimy na błędy i niepewności pomiarowe.

Błędy:

- przybliżenia (idealizacja zjawiska, przybliżone wzory)
- systematyczne (przeoczenia)
- grube (pomyłki)

Niepewności pomiarowe:

- wzorcowania -> $\Delta_d x$ (zwykle działka elementarna przyrządu)
- eksperymentatora -> $\Delta_e x$ (np. tzw. błąd paralaksy)
- przypadkowe

Ocena –szacowanie niepewności pomiaru – jest głównie związana z **niepewnościami przypadkowymi,** które podlegają prawidłowościom statystycznym i do których ma zastosowanie rachunek prawdopodobieństwa.

Miarą statystycznego rozrzutu wyników pomiarowych wielkości **x** jest wielkość zw. **odchyleniem standardowym** – oznaczana S_x.

* * *

Mamy serię **n** pomiarów wielkości **X**

wyniki => $x_1, x_2, x_3, \ldots ..,x_i, \ldots \ldots x_n$
istnieje wartość rzeczywista => **X**
możemy wyznaczyć wartość, którą uznajemy za
wartość najbardziej prawdopodobną => $\langle x \rangle$

Odchyłki

$x_1 - \langle x \rangle$; $x_2 - \langle x \rangle$; ....; $x_i - \langle x \rangle$; ....; $x_n - \langle x \rangle$

Prawidłowości o charakterze statystycznym:
- małe odchyłki występują częściej, duże – rzadziej
- odchyłki o znakach przeciwnych, ale o tych samych wartościach bezwzględnych – jednakowo prawdopodobne,

tzn. ich suma

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - \langle x \rangle) = 0.$$

Dlatego pewną miarę dokładności pomiarów stanowi, zawsze różna od zera suma

$$Q = \sum_{i=1}^{n}(x_i - \langle x \rangle)^2$$

Wartość $\langle x \rangle$, najbardziej prawdopodobna jest znajdowana na podstawie logicznego warunku stwierdzającego, że funkcja

$$Q(\xi = \langle x \rangle) = \sum_{i=1}^{n}(x_i - \xi)^2 = \mathit{min}$$

To stwierdzenie => **zasada najmniejszych kwadratów.**

Wynika z niej

$$\left(\frac{dQ}{d\xi}\right)_{\langle x \rangle} = -2\sum_{i=1}^{n}(x_i - \langle x \rangle) = -2\left[\sum_{i=1}^{n} a_i - n \langle x \rangle\right] = 0$$

i następnie

$$\langle x \rangle = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \quad .$$

Średnia arytmetyczna wartości pomiarowych = **wartość najbardziej prawdopodobna** (dla jednakowo ważnych pomiarów !!!)

Podstawowe miary dokładności pomiarów

Definiuje się =>
odchyłkę (niepewność) standardową pojedynczego pomiaru - S_x,
ze wzoru

$$S_x{}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - x)^2$$

gdzie: $S_x{}^2$ - nosi nazwę **wariancji** albo **dyspersji.**

Można dość łatwo pokazać, że szacunkowo $S_x{}^2$ wyraża się wzorem

$$S_x^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - <x>)^2$$

Podobnie, definiuje się =>
odchyłkę standardową wartości średniej <x> - $S_{\bar{x}}$, z zależności

$$S_{\bar{x}}^2 = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(<x>_k - x)^2.$$

$S_{\bar{x}}$ - jest miarą dokładności wyznaczenia wartości najbardziej prawdopodobnej <x>.
Można dowieść, że między S_x^2 i $S_{\bar{x}}^2$ zachodzi ogólna relacja

$$S_{\bar{x}}^2 = \frac{1}{n}S_x^2$$

zatem odchyłkę standardową wartości średniej oblicza się za pomocą wzoru

$$S_{\bar{x}}^2 = \frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(x_i - <x>)^2$$

* * *

Rozkład normalny (Gaussa) prawdopodobieństwa

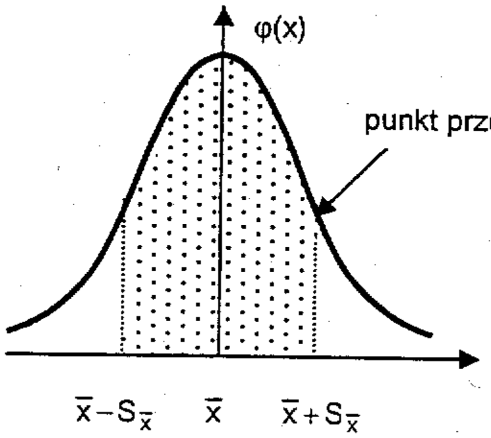
- najczęściej spotykany rozkład statystyczny odchyłek $\Delta x_i = x_i - x$. Jest on teoretycznie uzasadniony dla dużej liczby pomiarów, gdy $n \to \infty$.

Wtedy traktuje się rozkład odchyłek jako rozkład ciągły wartości Δx i wprowadza się pojęcie gęstości prawdopodobieństwa $y = y(\Delta x)$, która jest opisana wzorem

$$y(\Delta x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{(\Delta x)^2}{2\sigma^2}}$$

gdzie: σ^2 ma sens charakterystycznego parametru rozkładu Gaussa – jego wariancji; zaś σ jest odchyłką standardową tego rozkładu.

a) rozkład Gaussa



Wartościom $|\Delta x| = \sigma$ odpowiadają na wykresie krzywej Gaussa punkty przegięcia krzywej $\left({d^2 y}/{d(\Delta x)^2} = 0 \right)$, a pole zawarte między nimi stanowi ok. 0,683 część całkowitego pola pod krzywą. Oznacza to, że prawdopodobieństwo otrzymania pomiaru o odchyłce w zakresie $\Delta x \in |\sigma|$ wynosi 68,3 %.

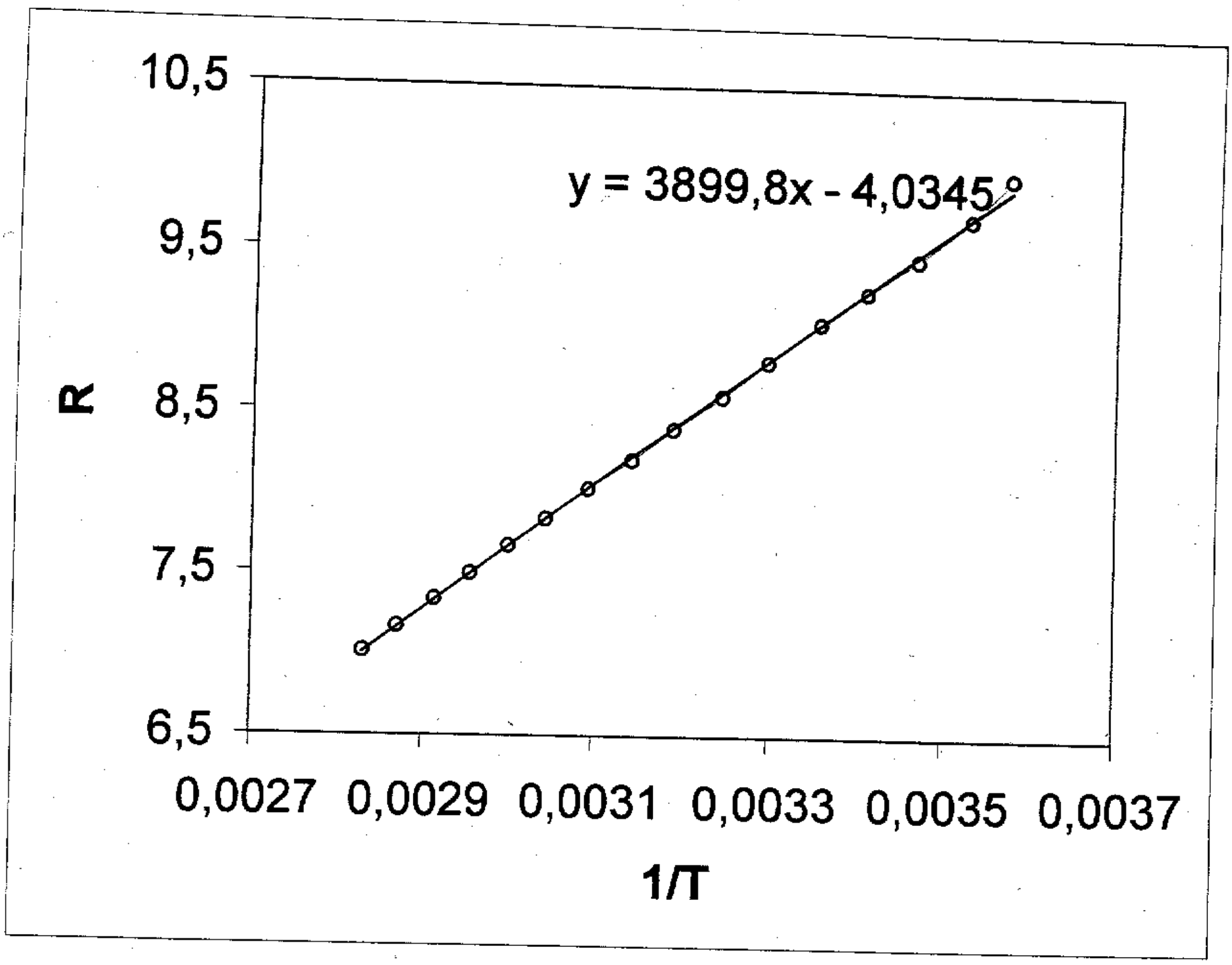
Można pokazać, że pomiędzy odchyleniami standardowymi: Gaussa σ i otrzymanym wcześniej S_x, dla dużych wartości n (formalnie $n \to \infty$), zachodzi tożsamość.
Tak więc interpretuje się, że otrzymany na podstawie pomiarów wynik, podany w przedziale $\pm S_x$ jest pewny w 68,3 %. Jeżeli zwiększyć ten przedział do $\pm 2S_x$ można ufać poprawności wyniku w 95,5 %; a w przypadku przedziału $\pm 3S_x$ ufność osiąga wartość ok. 99,7 %.

Regresja liniowa metodą najmniejszych kwadratów

Przykład: ćwiczenie 13 => mierzy się – rezystancję półprzewodnika **R** w funkcji temperatury **T**; zachodzi relacja

$$\ln R = \text{const} \cdot 1/T + \ln R_o$$

należy wyznaczyć parametry R_o i const.



Ogólnie: przewidujemy, że obowiązuje liniowa zależność

$$y = a x + b$$

Nie znamy wartości współczynników a i b.

Wykonaliśmy n pomiarów dla różnych wartości x_i ,
gdzie $i = 1, 2, ...,n$.

Możemy zapisać:

x_1 -> y_1				$y(x_1) = a x_1 + b$
x_2 -> y_2				$y(x_2) = a x_2 + b$
. .	← wartości		wartości →	
x_i -> y_i	zmierzone		teoretyczne	$y(x_i) = a x_i + b$
. .				

Weźmy pod uwagę sumę

$$Q = \sum_{i=1}^{n} [y_i - y(x_i)]^2 = \sum_{i=1}^{n} [y_i - (ax_i + b)]^2$$

Zgodnie z zasadą najmniejszych kwadratów, najbardziej prawdopodobne wartości współczynników a i b otrzymujemy wtedy, gdy funkcja ta osiąga wartość minimalną; tzn., gdy zachodzą relacje

$$\frac{\partial Q}{\partial a} = 0 \qquad \text{oraz} \qquad \frac{\partial Q}{\partial b} = 0 .$$

Otrzymujemy więc dwa równania:

$$\frac{\partial Q}{\partial a} = -2\sum_{i=1}^{n} [y_i - (ax_i + b)]x_i = 0$$

oraz

$$\frac{\partial Q}{\partial b} = -2\sum_{i=1}^{n} [y_i - (ax_i + b)] = 0$$

z dwoma niewiadomymi a i b .

Z rozwiązania tych równań wynika, że najbardziej prawdopodobne wartości współczynników są opisane wzorami

$$a = \frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}$$

oraz

$$b = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \sum_{i=1}^{n} y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} x_i y_i}{n\cdot\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}.$$

Opisany powyżej sposób postępowania nosi nazwę → **regresja liniowa metodą najmniejszych kwadratów.**